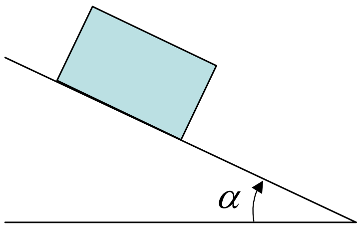
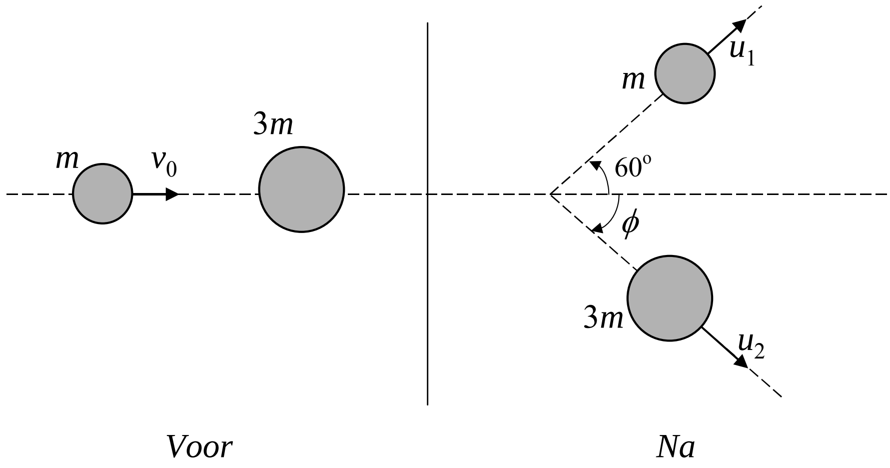
Tentamen Mechanica, 24 april 2007, 9.00-12.00 uur
Maak elke opgave op een apart vel
Schrijf je naam en studentnummer op elk vel
Cijfer = Σ(punten)/2.5

Opgave 1: Hellend vlak
Een blok met massa m bevindt zich op een hellend vlak dat een hoek α maakt met het horizontale vlak. Op de massa werkt de zwaartekracht (versnelling g loodrecht naar beneden) en een wrijvingskracht F_w waarvan de grootte evenredig is met het produkt van de normaalkracht op het oppervlak en de snelheid van het blok: $F_w = \gamma F_N v$, met γ een evenredigheidsconstante.



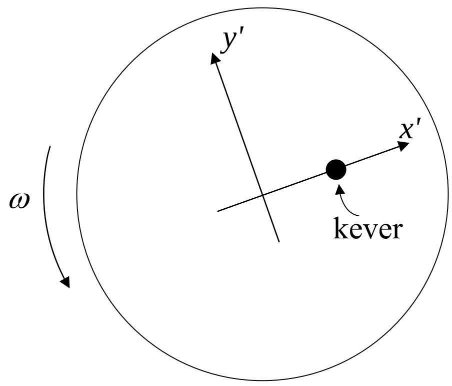
2p a) Geef de bewegingsvergelijking (Tweede wet van Newton) voor het blok.
2p b) Laat zien dat de bewegingsvergelijking een oplossing heeft van de vorm $v(t) = A - Be^{-Ct}$ en druk A, B, en C uit in de gegeven grootheden, aannemend dat het blok op $t = 0$ vanuit rust wordt losgelaten.
1p c) Check de juistheid van je antwoord door te laten zien dat dit voor $\alpha = 0$ het verwachte resultaat geeft.
1p d) In de limiet van zeer grote tijden wordt een constante snelheid bereikt. Laat zien dat de grootte van die snelheid ook volgt uit een eenvoudig evenwicht van twee krachten.
2p e) Bepaal de totale weglengte s die door het blok na tijd t is afgelegd.
1p f) *Bonusvraag*: check de juistheid van het antwoord onder b) door te checken dat in de limiet voor $\gamma \to 0$ het verwachte resultaat wordt verkregen. Hierbij kun je gebruiken dat $e^x \approx 1 + x$ voor $|x|$ klein.

Opgave 2: Elastische botsing
Biljartbal 1 met massa m botst met een snelheid v_0 tegen een stilliggende biljartbal 2 met massa $3m$ (gezien vanuit het laboratorium stelsel). Na de botsing heeft biljartbal 1 een snelheid u_1 en maakt een hoek van 60^o met de oorspronkelijke bewegingsrichting. Biljartbal 2 heeft een snelheid u_2 en maakt een hoek ϕ met de oorspronkelijke bewegingsrichting. De botsing kan als puur elastisch worden verondersteld.
2p a) Welke behoudswetten gelden er? Schrijf ze uit in termen van m, v_0, u_1, u_2 en ϕ.
4p b) Bepaal u_1 en u_2 als functie van v_0.
1p c) Bepaal ϕ.
1p d) Bepaal de snelheid van het zwaartepunt van het syteem van de twee biljartballen.
2p e) Bepaal de hoek die biljartbal 1 maakt met de oorspronkelijke bewegingsrichting gemeten in het zwaartepuntstelsel.



Opgave 3: Kever

Een kever bevindt zich op een stilstaande grammofoonplaat en kruipt met een constante snelheid v' in een rechte lijn naar het middelpunt van de plaat. Vervolgens wordt de platenspeler aangezet, zodat de plaat met toenemende snelheid ω gaat roteren (tegen de wijzers van de klok in, zie afbeelding).



2p a) Geef de bewegingsvergelijking (Tweede wet van Newton) voor de kever in het roterende assenstelsel. Bespreek de verschillende termen.

2p b) Neem bovenstaande afbeelding over op papier. Geef hierin de richting aan van de verschillende intertiaalkrachten (ook wel pseudokrachten genoemd), die op de kever werken.

Als de plaat op toeren is (i.e. de hoeksnelheid ω is constant), besluit de kever om 180° om te keren en met een constante snelheid v' van het middelpunt af te bewegen.

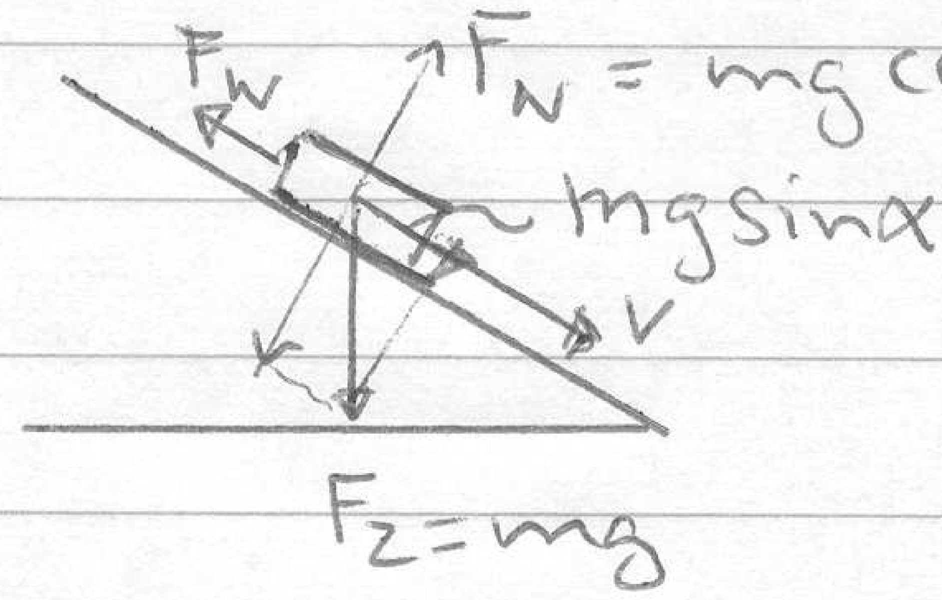
1p c) Laat zien dat de fysische kracht die de grammofoonplaat op de kever uitoefent gelijk is aan $\vec{F} = -m\omega^2 x' \, \vec{i}' + 2m\omega v' \, \vec{j}'$, met x' de afstand van de kever tot het middelpunt en $\vec{i}'$ en $\vec{j}'$ de Cartesische eenheidsvectoren in de positieve x' en y' richting, respectievelijk.

1p d) Tot welke afstand x' kan de kever naar buiten kruipen voordat hij gaat glijden? De statische wrijvingscoefficient tussen de kever en de plaat is μ.

1p e) Wat is de kritische waarde van v' waarboven de kever voor iedere x' gaat glijden?

Mechanica 24 april 2007

Opg. 1



a) $m\dot{v} = mg\sin\alpha - F_W$

$$m\dot{v} = mg\sin\alpha - \gamma mg\cos\alpha\, v$$

$$\dot{v} = g\sin\alpha - \gamma g\cos\alpha\, v$$

b) Oplossing door scheiding van variabelen of door substitutie van de gegeven oplossing.

Scheiding: $$\frac{dv}{g\sin\alpha - \gamma g\cos\alpha\, v} = dt$$

$$\int_0^v \frac{dv'}{g(\sin\alpha - \gamma\cos\alpha\, v')} = t \qquad (v(t=0)=0)$$

$$-\frac{1}{\gamma\cos\alpha}\frac{1}{g}\ln(\sin\alpha - \gamma\cos\alpha\, v')\Big|_0^v = t$$

$$\ln(\sin\alpha - \gamma\cos\alpha\, v) - \ln(\sin\alpha) = -\gamma g\cos\alpha\, t$$

$$\ln(1 - \gamma\cot\alpha\, v) = -\gamma g\cos\alpha\, t$$

$$1 - \gamma\cot\alpha\, v = \exp(-\gamma g\cos\alpha\, t)$$

$$\Rightarrow v = \frac{1}{\gamma\cot\alpha}\left[1 - \exp(-\gamma g\cos\alpha\, t)\right]$$

Substitutie: $\Rightarrow A = \frac{1}{\gamma\cot\alpha}$; $B = \frac{1}{\gamma\cot\alpha}$; $C = \gamma g\cos\alpha$

$$\dot{v} = BCe^{-ct}$$

$$\Rightarrow BCe^{-ct} = g\sin\alpha - \gamma g\cos\alpha\,(A - Be^{-ct})$$

$$\Rightarrow BC = +\gamma g\cos\alpha\, B \quad \text{én} \quad g\sin\alpha = +\gamma g\cos\alpha\, A$$

$$\Rightarrow C = +\gamma g\cos\alpha \quad \text{én} \quad A = 1/\gamma\cot\alpha$$

Verder: $v(t=0)=0 \Rightarrow A = B \Rightarrow B = 1/\gamma\cot\alpha$

opg. 1, vervolg.

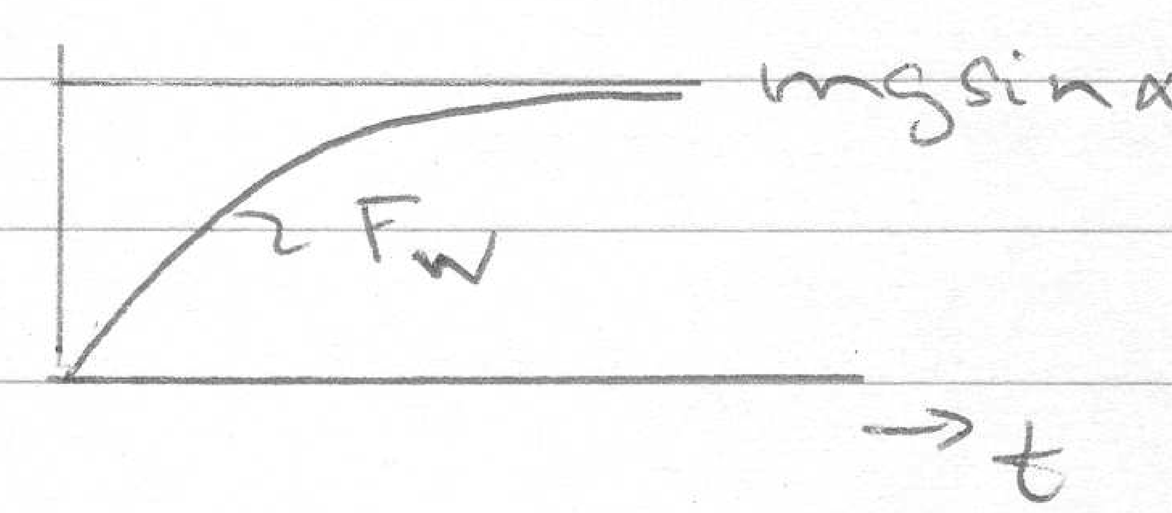
c) $\alpha = 0 \Rightarrow \cot\alpha = \infty \Rightarrow A = B = 0;\ C = \gamma g$

$\Rightarrow v = 0$, hetgeen correct is, want het vlak helt niet, dus het blok wordt niet versneld.

d) $t \to \infty \Rightarrow v = A = \dfrac{1}{\gamma \cot\alpha}$

Er is dan evenwicht tussen de component van de zwaartekracht langs het vlak ($mg\sin\alpha$) en de wrijvingskracht: $\gamma mg\cos\alpha\, v$ $\to$ $v = 1/\gamma \cot\alpha$.

NB: $mg\sin\alpha$ is constant
F_w groeit in tijd, tot evenwicht bereikt is, en deze kracht precies gelijk is aan $mg\sin\alpha$. Het blok beweegt vanaf dat moment met constante snelheid.



e) $s = \int_0^t v(t')dt' = \int_0^t (A - Be^{-Ct'})\,dt'$

$= At + \dfrac{B}{C}(e^{-Ct} - 1) = \dfrac{1}{\gamma\cot\alpha}\left(t + \dfrac{1}{\gamma g\cos\alpha}\left[e^{-\gamma g\cos\alpha t} - 1\right]\right)$

Bonus:

f) $\gamma \to 0 \Rightarrow 1 - e^{-\gamma g\cos\alpha t} \simeq \gamma g\cos\alpha t$

$\Rightarrow v = \dfrac{\gamma g\cos\alpha t}{\gamma\cot\alpha} = (g\sin\alpha)t$, hetgeen correct is,

omdat voor $\gamma = 0$ er geen wrijving is, dus een eenparig versnelde beweging, met versnelling $g\sin\alpha$.

Opg. 2

a) Impulsbehoud

$$m v_0 = m u_1 \cos 60^\circ + 3m\, u_2 \cos\phi \qquad (1)$$
$$0 = m u_1 \sin 60^\circ - 3m\, u_2 \sin\phi \qquad (2)$$

Energiebehoud

$$\tfrac{1}{2} m v_0^2 = \tfrac{1}{2} m u_1^2 + \tfrac{1}{2}(3m) u_2^2 \qquad (3)$$

b) $(1) \Rightarrow \quad v_0 = \tfrac{1}{2} u_1 + 3u_2 \cos\phi$

$(2) \qquad 0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\, u_1 - 3u_2 \sin\phi$

$$\Rightarrow 9u_2^2 (\cos^2\phi + \sin^2\phi) = (v_0 - \tfrac{1}{2}u_1)^2 + \tfrac{3}{4}u_1^2$$

$$\Rightarrow 9u_2^2 = v_0^2 - v_0 u_1 + u_1^2 \qquad (a)$$

$(3) \Rightarrow \quad 3u_2^2 = v_0^2 - u_1^2$

of: $\quad 9u_2^2 = 3v_0^2 - 3u_1^2 \qquad (b)$

$(b) - (a) \Rightarrow \quad 2v_0^2 - 4u_1^2 + v_0 u_1 = 0$

of: $\quad 4u_1^2 - v_0 u_1 - 2v_0^2 = 0$

$$\Rightarrow \quad u_1 = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 32 v_0^2}}{8} = \frac{1}{8} v_0 \pm \frac{1}{8} v_0 \sqrt{33}$$

− oplossing vervalt, omdat $u_1 > 0$.

$$\Rightarrow \quad u_1 = \frac{1}{8}(1 + \sqrt{33})\, v_0 \qquad (\simeq 0.84\, v_0)$$

Substitueer terug in (b) $\Rightarrow \quad u_2^2 = \frac{1}{3}\left(v_0^2 - \frac{1}{64}(1+\sqrt{33})^2 v_0^2\right)$

$$\Rightarrow u_2^2 = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{34 + 2\sqrt{33}}{64}\right) v_0^2$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{30}{64} - \frac{\sqrt{33}}{32}\right)^{1/2} v_0 \simeq \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{15 - \sqrt{33}}{32}\right)^{1/2} v_0 \simeq 0.31\, v_0$$

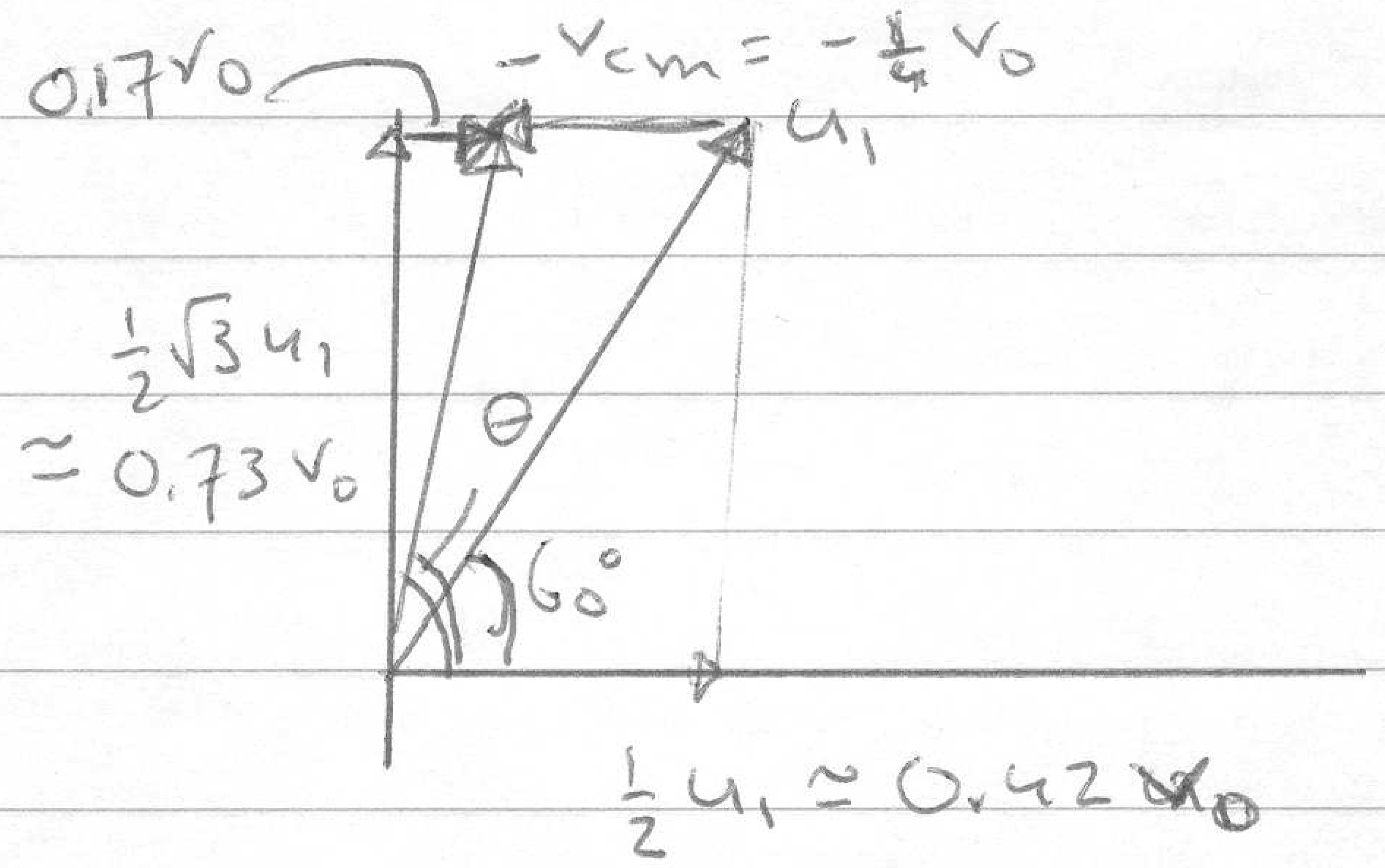
Opg. 2, vervolg.

c) (2) $\Rightarrow \quad \sin\phi = \dfrac{u_1 \sin 60^\circ}{3u_2} = \dfrac{1}{6}\sqrt{3}\,\dfrac{u_1}{u_2} \simeq 0.78$

$\Rightarrow \phi \simeq 51^\circ$

d) $v_{cm} = \dfrac{m v_0}{4m} = \dfrac{1}{4} v_0$, gericht langs horizontale as

e)



$\tan\theta \simeq \dfrac{0{,}73\, v_0}{0{,}17\, v_0} = 4.3$

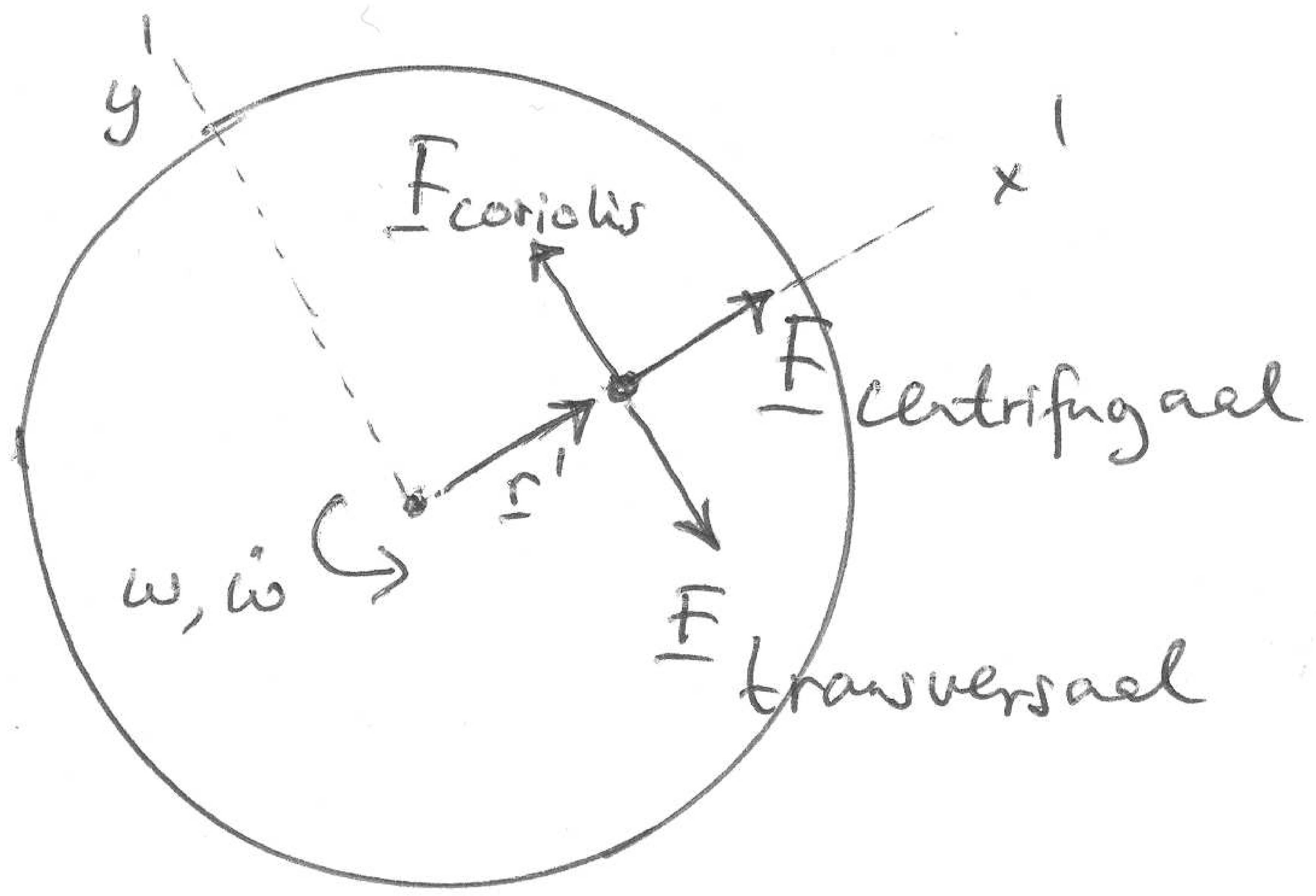
$\theta \simeq 77^\circ$

Opgave 3: kever

a. $m\underline{a}' = \underline{F} - 2m\,\underline{\omega} \times \underline{v}' - m\,\underline{\dot{\omega}} \times \underline{r}' - m\,\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}')$

- $m\underline{a}'$: versnelling in het roterende systeem
- $\underline{F}$: fysische kracht
- $-2m\,\underline{\omega} \times \underline{v}'$: Coriolis kracht
- $-m\,\underline{\dot{\omega}} \times \underline{r}'$: transversaal-kracht
- $-m\,\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}')$: centrifugaal-kracht

b.



c. $\underline{a}' = 0$ ($\underline{v}'$ constant)

$\underline{F}_{transversaal} = m\,\underline{\dot{\omega}} \times \underline{r}' = 0$ ($\underline{\dot{\omega}} = 0$, $\underline{\omega}$ constant)

$\underline{F}_{coriolis} = -2m\,\underline{\omega} \times \underline{v}' = -2m\,\omega v'\,\underline{j}'$

$\underline{F}_{centrifugaal} = m\omega^2 x'\,\underline{i}'$

$\Rightarrow m\underline{a}' = \underline{F} + \underline{F}_{coriolis} + \underline{F}_{transversaal} + \underline{F}_{centrifugaal} = 0$

$\Rightarrow \underline{F} = -m\omega^2 x'\,\underline{i}' + 2m\omega v'\,\underline{j}'$

d. $\|\underline{F}\| = \mu m g$

$$\|\underline{F}\| = \sqrt{(m\omega^2 x')^2 + (2m\omega v')^2}$$

$$\|\underline{F}\|^2 = \mu^2 \cancel{m^2} g^2 = \cancel{m^2}\omega^4 x'^2 + 4\cancel{m^2}\omega^2 v'^2$$

$$\Rightarrow \quad x' = \frac{\sqrt{\mu^2 g^2 - 4\omega^2 v'^2}}{\omega^2}$$

e. $\mu^2 g^2 - 4\omega^2 v'^2 < 0 \quad \rightarrow$ geen oplossing

$$\Leftrightarrow \quad v' > \frac{\mu g}{2\omega}$$